Universidad Simón Bolívar
Matemáticas III (MA-1116)
Período Ene-Mar 2016

Elaborado por: Pablo Garrido
Ingeniería Electrónica
Carnet: 16-11296
Twitter @garridop3

SOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL

Ene-Mar 2016 (30%)

Pregunta 1 (8 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix}$

(a) Compruebe si $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es solución del sitema Ax=b

(b) Halle el conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo Ax=0

(c) Usando el inciso (b), dé el conjunto de soluciones del sistema Ax=b

Solución

(a) Para que y sea solución del sistema, ésta debe satisfacer la ecuación matriceal $Ay = b$. Así,

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+1 \\ 2-6-4 \\ 3-4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix} = b$$

Por lo tanto, como y NO satisface la ecuación matriceal, se concluye que $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

NO es una solución particular del sistema $Ax = b$

(b) Leyendo el enunciado, nos damos cuenta de que si resolvemos la parte a y la parte b por separado, vamos a tener que hacer dos veces el mismo Gauss pero con diferente vector b. Por ello, para ahorrarnos las cuentas, vamos a considerar la matriz aumentada $(A|b)$ con b genérico, tal que $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Aplicando operaciones elementales sobre las filas de la matriz para obtener una matriz Escalonada se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 2 & -3 & 5 & b_2 \\ 3 & -2 & 4 & b_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{2b_1-b_2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_2-b_1 \end{array}\right)$$

Así, para el inciso (b), en el que $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se tiene que el sistema tiene infinitas soluciones que vienen dadas por $\overline{x} = z \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) Para $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -9 \end{pmatrix}$, sustituyendo y simplificando nos queda que la matriz escalonada es $\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y el sistema tiene infinitas soluciones tal que $\overline{x} = z \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 2 (12 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calcule el determinante de A
(b) Diga si A es invertible
(c) Calcule la Adjunta de A
(d) Usando la Adjunta, calcule la inversa
(e) Halle la matriz x tal que $Ax = A^t$

Solución

(a) Por definición de determinante, $|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

Entonces, $|A| = (2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$ -1

(b) Como el $det(A) \neq 0$, A es invertible

(c) Sea, $AdjA = (cofA)^t$, tal que $cofA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ donde

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \qquad c_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad c_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad c_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad c_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad c_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \qquad c_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Entonces, $cofA = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -5 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Sea, por definición, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA$ Entonces, $A^{-1} = (-1) \begin{pmatrix} 7 & -5 & -3 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) Partiendo de la ecuación matriceal $Ax = A^t$ despejamos x: $A^{-1}Ax = A^{-1}A^t \Rightarrow x = A^{-1}A^t$

Así, x $= \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pregunta 3 (4 puntos) Sean A,B,C Matrices 2x2, con $|A| = 2$, $|B| = 3$ y C invertible. Si $|2ABC^{-1}| = 6$, Halle $|C|$.

Solución

Sea, $|2ABC^{-1}| = 6$
Por propiedades del determinantes: $|2A||B||C^{-1}| = 6$
$2^n|A||B||C^{-1}| = 6 \Rightarrow 2^2|A||B|\dfrac{1}{|C|} = 6 \Rightarrow 2^2|A||B| = 6|C| \Rightarrow \dfrac{2^2|A||B|}{6} = |C|$
Entonces, $|C| = 4$

Pregunta 4 (6 puntos) Dado el sistema

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 2 \\
x + 4y - z &= \beta \\
2x - y + 4z &= \beta^2
\end{aligned}
$$

Halle el valor de la constante β para que el sistema tenga
a) Infinitas soluciones.
b) Solución única.
c) No tenga solución.

Solución

Las matrices asociadas al sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz aumentada $(A|b)$
Aplicando operaciones elementales sobre las filas de la matriz se tiene que

$$\left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & \beta \\ 2 & -1 & 4 & \beta^2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc||c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta^2 + \beta - 6 \end{array}\right)$$

De la fila 3 se tiene que, $0 = (\beta - 2)(\beta + 3)$
Entonces, para $K = 2$ y $K = -3$ El sistema tiene infinitas soluciones.
Para $K \neq 2$ y $K \neq -3$ El sistema NO tiene solución.
El sistema NO puede tener solución única.

Este material fue resuelto y digitalizado para GECOUSB por
Pablo Alejandro Garrido Vega
Estudiante de Ingenieria Electrónica
carnet: 16-11296
Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas a mi correo
garridop3@hotmail.com